

1 Introduction

Soit G un groupe fini. Un polynôme générique (sur \mathbf{Q}) pour G est un élément de $\mathbf{Q}(t_1, \dots, t_s)[X]$, où les t_i sont des indéterminées, de groupe de Galois G sur $\mathbf{Q}(t_1, \dots, t_s)$, et tel que, si K est un corps contenant \mathbf{Q} et L/K une extension de groupe de Galois contenue dans G , il existe une spécialisation des paramètres t_1, \dots, t_s en des valeurs de K telle que le corps des racines du polynôme P ainsi obtenu soit égal à L .

Le groupe de plus petit ordre pour lequel on ignore s'il existe ou non un polynôme générique est le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3) = L_3(2)$.

Nous prouvons ici:

THÉORÈME 1.- *Il existe un polynôme générique pour le groupe de Galois $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$.*

Pour ce faire, nous prouvons la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- *Le polynôme*

$$P = X^4 - 4X^3 + 36VX^2 + 2U^2X^2 + 4U^2X - 8U^2VX + 36U^2V^2 + U^4 - 4U^2V$$

est un polynôme générique pour les extensions de groupe de Galois A_4 .

De plus, l'invariant de Witt de la forme quadratique $\mathrm{Tr}(x^2)$ associée est égal à

$$(-1, -1) + (U^2 - 9, -2(U^2V - 9V + 1 - U^2)).$$

Le théorème en est une conséquence facile : le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ est isomorphe au groupe \tilde{A}_4 . Or, si K/k est une extension de degré 4 dont la clôture galoisienne L a comme groupe de Galois A_4 , l'obstruction à l'existence d'une extension quadratique M/L telle que M/k soit galoisienne de groupe de Galois \tilde{A}_4 est égale à l'invariant de Witt de la forme $\mathrm{Tr}_{K/k}(x^2)$.

Or, si $(a, b) \in k^*$, k corps de caractéristique différente de 2, il est bien connu que le symbole $(-1, -1) + (a, b)$ est nul sur k si et seulement s'il existe $A, B, C, D, E \in k$ tels que

$$a = D^2(1 + A^2 + A^2B^2)(1 + B^2 + B^2C^2), \quad b = E^2(1 + B^2 + B^2C^2)(1 + C^2 + C^2A^2).$$

En posant $a = (U - 3)/(U + 3)$ et $b = -2(U^2V - 9V + 1 - U^2)$, on en déduit donc immédiatement une paramétrisation de (U, V) en fonction des 5 paramètres A, B, C, D, E .

REMARQUE.- Pour obtenir un polynôme générique explicite pour $L_3(2)$, on peut par exemple appliquer les résultats de T. Crespo (Explicit construction of $2S_n$ Galois extensions, J. Algebra 129 (1990)).

2 Démonstration de la proposition 1.

Pour tout polynôme f en une indéterminée X , on note $\text{disc}(f)$ son discriminant.

Dans ce qui suit, on note k le corps $\mathbf{Q}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, où les a_i sont des indéterminées.

On démontre aisément la proposition suivante:

PROPOSITION 2.- Soit P l'élément de $k[X]$ égal à $X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4$, et $Q = b_0X^3 + b_1X^2 + b_2X + b_3$ le reste de la division euclidienne de P'^2 par P . On a :

1) Si x_1, \dots, x_4 sont les racines de P , les racines de Q sont

$$\frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}$$

et les deux autres quantités analogues. (Donc Q est une résolvante pour le groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.)

2) Soit T une indéterminée, et $P_T = P - TQ \in k(T)[X]$. Il existe un polynôme $U(T) \in k[T]$ tel que le reste de $(P'_T)^2 \bmod P$ est égal à $U(T)Q$.

3) On a $\text{disc}(P_T) = \text{disc}(P)U(T)^2$.

4) L'extension M de $k(T)$ obtenue par adjonction des racines de P_T contient le corps L des racines de Q . L'extension $M/L(T)$ est une extension régulière de groupe de Galois $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

5) À constante multiplicative près, le polynôme Q est l'unique polynôme du troisième degré tel que le groupe de Galois de $P - TQ$ sur $\bar{k}(T)$ soit égal à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

6) Soit $\tilde{P} = Y^4P(X/Y)$ le polynôme homogénéisé de P , et $H = P''_{X^2}P''_{Y^2} - P''_{XY}^2$ le Hessien de P . On a $H(X, 1) = (-9a_1^2 + 24a_2)P - 9Q$.

7) On a $\text{disc}(Q) = \text{disc}(P)b_0^2$. De plus, l'application qui à (a_1, a_2, a_3, a_4) associe (a_1, c_1, c_2, c_3) , où $c_i = b_i/b_0$, $1 \leq i \leq 3$, est birationnelle.

En fait, seul le point 7) nous sera utile dans la suite. Explicitons les formules donnant les b_i en fonction des a_i :

On a $b_3 = a_3^2 - a_1^2a_4$, $b_2 = 4a_2a_3 - a_1^2a_3 - 8a_1a_4$, $b_1 = -a_1^2a_2 - 2a_1a_3 - 16a_4 + 4a_2^2$, $b_0 = -8a_3 - a_1^3 + 4a_1a_2$, d'où

$$a_2 = c_1a_1 - 2c_2, a_3 = c_2a_1 - 8c_3, a_4 = c_3a_1 + c_2^2 - 4c_1c_3.$$

La paramétrisation des polynômes de degré 4 de discriminant carré contenu dans A_4 est ainsi ramenée à celle des polynômes de degré 3 de discriminant carré.

On peut par exemple prendre

$$c_3 = 1/27c_1^3 - 1/12c_1v^2 - 27/4u^3 - 1/4uv^2 - 9/4c_1u^2, c_2 = c_1^2/3 - 27u^2/4 - v^2/4,$$

d'où a_1, a_2, a_3, a_4 en fonction de a_1, c_1, u, v .

On trouve alors le polynôme de la proposition 1 par le changement de variables

$$\begin{cases} c_1 = \frac{3a_1V-18uV+6u}{4V} \\ v = \frac{uU}{V} \\ x = \frac{-2u-Va_1+2Xu}{4V} \end{cases}$$

qui transforme birationnellement (c_1, v, x) en (U, V, X) , l'application réciproque étant

$$\begin{cases} U = -\frac{6v}{-18u-4c_1+3a_1} \\ V = -\frac{6u}{-18u-4c_1+3a_1} \\ X = -\frac{2(6x+9u+2c_1)}{-18u-4c_1+3a_1} \end{cases}$$

Un calcul sans difficulté permet alors de montrer que l'invariant de Witt de la forme $\text{Tr}(x^2)$ correspondante a la forme voulue, d'où le résultat.